Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

Lösungen für 7. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Lineare Gleichungssysteme und der Gauß-Algorithmus

Aufgabe 1. ((Alleine) 4P)

Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie dazu das Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ und verwenden Sie Zeilen- und Spaltenumformungen um das Gleichungssystem zu lösen.

Aufgabe 2. ((Alleine) 2P+2P)

(a) Bestimmen Sie abhängig von den Parametern α und β die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A(\alpha)x = b(\beta)$, wobei

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2+2\alpha \\ 1 & 3+\alpha & 1+\alpha \\ 3 & 6 & 7+7\alpha \end{pmatrix}, \ b(\beta) = \begin{pmatrix} 3+4\beta \\ 4+2\beta \\ 9+14\beta \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass

$$S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

in Treppenenform ist.
Hinweis: Denken Sie an Zeilenumformungen und notieren Sie sich die dazu äquivalenten Matrixmultiplikationen.

Lösung 2.

(a) Es gilt

$$(A(\alpha)|b(\beta)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2+2\alpha & 3+4\beta \\ 1 & 3+\alpha & 1+\alpha & 4+2\beta \\ 3 & 6 & 7+7\alpha & 9+14\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{III-3I}]{\text{II-I}} (\tilde{A}(\alpha)|\tilde{b}(\beta)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2+2\alpha & 3+4\beta \\ 0 & 1+\alpha & -1-\alpha & 1-2\beta \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 2\beta \end{array}\right)$$

1. Fall $\alpha = -1$:
Wir ehalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3+4\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta \end{array}\right)$$

Es gibt kein $\beta \in \mathbb{R}$, sodass $2\beta = 0$ und $1 - 2\beta = 0$. Damit ist das LGS für $\alpha = -1$ nicht lösbar.
2. Fall $\alpha \neq -1$:
Dann hat die Matrix $(\tilde{A}(\alpha)|\tilde{b}(\beta))$ Rang 3 und es gibt unabhängig von $\beta \in \mathbb{R}$ genau eine hässliche Lösung.

(b) Es $A_{i,j}^{\alpha} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Additionsmatrix, die das α-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile addiert. Für

$$M_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt dann:

$$A_{3,1}^{(-1)} \cdot A_{2,1}^{(-1)} \cdot M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{3,2}^{3} \cdot A_{1,2}^{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze also $S := A_{3,2}^{3} \cdot A_{1,2}^{(-2)} \cdot A_{3,1}^{(-1)} \cdot A_{2,1}^{(-1)}$.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 4P)

Es sei $V = \mathbb{R}^n$ und für $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ seien Vektoren $\underline{v}_i \in V$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $1 \leq i \leq n+1$ Skalare $\lambda_i \in \mathbb{R}$ existieren mit $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein i, sodass

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \cdots + \lambda_{n+1} \cdot \underline{v}_{n+1} = 0$$

gilt.
Hinweis: Versuchen Sie das Problem mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems zulösen. Dabei wird Ihnen der Rang der Treppenform sicher weiterhelfen.

Lösung 3.

Es sei $\underline{v}_i{}^t = (v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{n,i})^t \in \mathbb{R}^n$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n+1}$ die Matrix definiert durch $M(l,i) = v_{l,i}$ für $l \in \{1, \ldots, n\}$ und $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, das heißt

$$M = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n+1} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Nach dem Gaußverfahren existiert eine reguläre Matrix $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, sodass $S \cdot M = T$ gilt für eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n+1}$ in Treppenform. Durch vertauschen der $\underline{v}_i$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass T von der Form

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{1,r+1} & \cdots & \cdots & t_{1,n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & t_{2,r+1} & \cdots & \cdots & t_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & t_{r,r+1} & \cdots & \cdots & t_{r,n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \ldots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dabei ist $r = \mathrm{Rang}(T) < n+1$.
Nun betrachte das lineare Gleichungssystem $T \cdot \underline{\lambda} = \underline{0}$ mit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})^t \in \mathbb{R}^{n+1}$. Da $r = \mathrm{Rang}(T) < n+1$ gilt, folgt sofort $\mathbb{L}^h = \mathbb{L}(T|0) = \mathbb{L}(M|0) \neq \{\underline{0}\}$.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 2P+2P)

Wir definieren eine Relation „$\sim$" auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ den reellen $n \times n$ Matrizen, durch

$$A \sim B \;:\Leftrightarrow\; \exists\, S, T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) : \; A = S \cdot B \cdot T.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Relation „$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass es $n+1$ Äquivalenzklassen bezüglich „$\sim$" auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, nämlich $[\underline{0}]_\sim$ und $[M_k]_\sim$ für $1 \leq k \leq n$, wobei $M_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Block-Matrix der Form

$$M_k := \begin{pmatrix} I_k & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 01. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

ist.
Hinweis: Denken Sie an den Gauß-Algorithmus, Zeilen- und Spaltenumformungen.

Lösung 4.

(a)
- Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S, T = I_n \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ gilt $S \cdot A \cdot T = A$.
- Es seien, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A \sim B$, d.h. es existieren Matrizen $S, T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ mit $A = S \cdot B \cdot T$. Daraus folgt $B = S^{-1}AT^{-1}$ für $S^{-1},\ T^{-1} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.
- Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A \sim B$ und $B \sim C$ dann existieren Matrizen $S_1, S_2, T_1, T_2 \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ mit $B = S_1 \cdot A \cdot T_1$ und $C = S_2 \cdot B \cdot T_2$ für $S = S_2 \cdot S_1 \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ und $T = T_1 \cdot T_2 \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ gilt dann $C = S \cdot A \cdot T$.

(b) Es sei $\underline{0} \neq A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Nach dem Gauß Algorithmus existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, sodass $S \cdot A$ Treppenform hat, das heißt $S \cdot A$ ist von der Form

$$S \cdot A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1_{1,j_1} & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1_{2,j_2} & * & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1_{3,j_3} & * & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1_{r,j_r} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ \\ n \end{array}$$

Wobei $r = \mathrm{Rang}(S \cdot A)$. Für die transponierte Matrix $(S \cdot A)^t = A^t \cdot S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ folgt

$$(S \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1_{1,j_1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1_{2,j_2} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1_{3,j_3} & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & * & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1_{r,j_r} & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Gauß Algorithmus angewendet auf $(S \cdot A)^t$ liefert ein $T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ mit

$$T \cdot A^t \cdot S^t = M_r = \begin{pmatrix} I_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Also $S \cdot A \cdot T^t = M_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$.